ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN QUANG HẢI

PHƯƠNG PHÁP LƯỚI GIẢI BÀI TOÁN SONG ĐIỀU HÒA TRONG MIỀN TRÒN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Vũ Vinh Quang

THÁI NGUYÊN - 2016

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC BẢNG

Mở đầu

Một số bài toán trong cơ học các môi trường liên tục nghiên cứu về các tấm đàn hồi qua mô hình hóa đều đưa về các bài toán biên cho phương trình song điều hòa là phương trình cấp bốn dạng đặc biệt với các hệ điều kiện biên khác nhau. Trong trường hợp khi điều kiện biên là bình thường (đủ cả điều kiện biên với hàm và đạo hàm cấp hai) đồng thời miền đang xét là miền chữ nhật, sử dụng phương pháp phân rã phương trình cấp bốn về 2 phương trình cấp hai, người ta có thể xác định nghiệm của bài toán thông qua các phương pháp sai phân truyền thống. Trong trường hợp khi thiếu điều kiện biên với đạo hàm cấp hai, kết hợp với phương pháp toán tử biên miền, chúng ta cũng có thể xây dựng các phương pháp lặp để xác định nghiệm gần đúng của bài toán. Tuy nhiên trong trường hợp khi miền đang xét của bài toán là miền tròn và hệ điều kiện biên là thiếu đối với biểu thức đạo hàm cấp 2 thì các phương pháp trên là không thực hiện được.

Trong tài liệu [8], các tác giả Ming Chih Lai, Hsi Chi Liu đã đưa ra một phương pháp sai phân bài toán song điều hòa trên miền tròn bằng cách sử dụng hệ tọa độ cực (r,θ) để chuyển bài toán song điều hòa về 2 bài toán cấp hai, từ đó xây dựng thuật toán lưới tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán gốc.

Xuất phát từ thực tế đó, mục tiêu nghiên cứu chính của luận văn là tìm hiểu về mô hình toán học của bài toán song điều hòa, các phương pháp phân rã và đặc biệt là nghiên cứu các phương pháp sai phân bài toán trên miền tròn sử dụng hệ trục tọa độ cực, xây dựng các thuật toán giải hệ các phương trình sai phân thông qua các thuật toán giải các hệ phương trình đại số tuyến tính, xây dựng các chương trình thực nghiệm trên môi trường Matlab. Kiểm tra tính chính xác của các thuật toán qua các ví dụ thực tế.

Trong thời gian nghiên cứu và thực hiện luận văn tác giả đã nhận được nhiều sự quan tâm, giúp đỡ và góp ý của nhiều tập thể, cá nhân.

Trước hết tác giả xin được bầy tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến tiến sĩ Vũ Vinh Quang – Thầy trực tiếp hướng dẫn khoa học đã tận tâm chỉ bảo, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn này.

Với tình cảm chân thành và sâu sắc tác giả xin bầy tỏ lòng biết ơn tới Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo sau đại học, khoa Toán – Tin trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin chân thành cảm ơn quý thầy cô đã tận tình giảng dạy, chỉ dẫn cho tôi những tri thức, kinh nghiệm, bài học quý báu.

Xin chân thành cảm ơn các anh chị, bạn bè trong khóa 8 chuyên ngành Toán ứng dụng đã chia sẻ tinh thần tình cảm cho tôi trong suốt khóa học.

Mặc dù hết sức cố gắng trong quá trình học tập, nghiên cứu và đọc tài liệu để hoàn thành nhưng luận văn vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được ý kiến chỉ dẫn của quý thầy, cô, của hội đồng chấm luận văn và ý kiến đóng góp chân thành của các đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện với hiệu quả cao.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 5 năm 2016

TÁC GIẢ LUẬN VĂN

Nguyễn Quang Hải

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Nội dung chính của chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản về phương pháp sai phân, các kết quả xây dựng các chương trình giải số các bài toán biên trong miền hình chữ nhật qua phương pháp sai phân, phương trình song điều hòa và phép biến đổi tọa độ cực áp dụng đối với phương trình song điều hòa, thuật toán truy đuổi 3 đường chéo. Đây là các kiến thức cơ bản, làm nền tảng để nghiên cứu các kết quả được trình bày trong chương 2 của luận văn. Các kiến thức trình bày được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 3, 8, 9].

1.1 Lý thuyết về sai phân

Phương pháp lưới hay còn gọi là phương pháp sai phân được áp dụng rộng rãi trên nhiều lĩnh vực khoa học, kỹ thuật. Nội dung chính của nó là đưa bài toán vi phân đang xét về giải hệ phương trình sai phân (tức là hệ thức hoặc các hệ thức liên hệ các giá trị của hàm số tại các thời điểm khác nhau) bằng các phương pháp đại số.

1.2 Công thức Taylor

A/ Trường hợp hàm 1 biến số

Giả sử $u\left(x\right)$ là một hàm số xác định và có đạo hàm đến cấp $m+1$ trong một khoảng (α,β) chứa x và $x+h$, trong đó h là một đại lượng đủ nhỏ có thể dương hay âm. Khi đó trong giải tích toán học, chúng ta có công thức khai triển Taylor như sau.

$$\begin{aligned} u\left(x+h\right) &= u\left(x\right) + hu'\left(x\right) + \frac{\left(h\right)^2}{2!}u''\left(x\right) + \ldots \\ &+ \frac{\left(h\right)^m}{m!}u^{(m)}\left(x\right) + \frac{\left(h\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!}u^{(m+1)}\left(c\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Trong đó c là một điểm nào đó ở trong khoảng từ x đến $x+h$; để diễn tả điều đó ta có thể viết $c = x + \theta.\Delta x$ với $0 < \theta < 1$.

Ta giả thiết thêm:

$$\left|u^{m+1}\left(x\right)\right| \le M = const, \qquad x \in (\alpha, \beta)$$

Khi đó số hạng cuối cùng ở (1.1) là một vô cùng bé khi $h \to 0$ và công thức Taylor (2.3) viết gọn hơn:

$$\begin{aligned} u\left(x+h\right) &= u\left(x\right) + hu^{'}\left(x\right) + \frac{\left(h\right)^2}{2!}u''\left(x\right) + \ldots \\ &+ \frac{\left(h\right)^m}{m!}u^{(m)}\left(x\right) + o(h^m) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Nhận xét: Về mặt ý nghĩa toán học tính toán thì công thức Taylor, giá trị của hàm số tại điểm $x+h$ sẽ được tính qua các giá trị hàm và đạo hàm các cấp tại điểm x. Nếu chúng ta giữ đến số hạng chứa đạo hàm cấp m thì kết quả tính toán sẽ đảm bảo sai số xấp xỉ một đại lượng vô cùng bé là $o(h^m)$.

B/ Trường hợp hàm 2 biến số

Giả sử $u\left(x,y\right)$ là một hàm số xác định và có các đạo hàm riêng theo các biến đến cấp $m+1$ trong một miền $\Omega \in R^2$ chứa các điểm (x,y) và $(x+h, y+k)$, trong đó h,k là các đại lượng đủ nhỏ có thể dương hay âm. Khi đó tương tự như hàm 1 biến số, chúng ta có công thức khai triển Taylor như sau

$$\begin{aligned} &u\left(x+h, y+k\right) = u\left(x,y\right) + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + \\ &\frac{1}{2!}[h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] + \ldots + o(h^m + k^m) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Nhận xét: Về mặt ý nghĩa toán học tính toán thì công thức Taylor, giá trị của hàm số tại điểm $(x+h, y+k)$ sẽ được tính qua các giá trị hàm và các đạo hàm riêng các cấp tại điểm (x,y). Nếu chúng ta giữ đến số hạng chứa các đạo hàm cấp m thì kết quả tính toán sẽ đảm bảo sai số xấp xỉ một đại lượng vô cùng bé là $o(h^m)$. Sau đây luận văn sẽ đưa ra một số kết quả khi xây dựng các phương pháp sai phân dựa trên công thức Taylor.

1.3 Các phương pháp sai phân và đạo hàm

A/ Trường hợp 1 chiều

- **Phát biểu bài toán**

Cho khoảng $[x_0, X]$. Tìm hàm $u = u(x)$ xác định tại $[x_0, X]$ và thỏa mãn:

$$u' = f(x,u) \qquad x_0 < x \le X \tag{1.4}$$

$$u(x_0) = \eta \tag{1.5}$$

Trong đó $f(x,u)$ là một hàm số cho trước và η là một số cho trước

Giả sử bài toán (1.4), (1.5) có nghiệm $u = u(x)$ đủ trơn, nghĩa là nó có đạo hàm liên tục đến cấp mà ta cần.

- **Lưới sai phân**

Ta chia đoạn $[x_0, X]$ thành N đoạn con bằng nhau, mỗi đoạn con dài $h = (b-a)/N$ bởi các điểm $x_i (i = 0..N), x_i = x_0 + ih$. Tập các điểm x_i gọi là một lưới sai phân trên $[x_0, X]$, ký hiệu là Ω_h, mỗi điểm x_i gọi là một nút của lưới, h gọi là bước của lưới.

- **Hàm lưới**

Đó là những hàm số xác định tại các nút của lưới Ω_h. Một số hàm $u(x)$ xác định tại mọi $x \in [a,b]$ sẽ tạo ra hàm lưới u có giá trị tại nút x_i là $u_i = u(x_i)$.

- **Đạo hàm lưới**

Xuất phát từ công thức Taylor trong trường hợp 1 biến số, chúng ta sẽ có các công thức tính xấp xỉ đạo hàm lưới với độ chính xác cấp 1 như sau:

Công thức đạo hàm tiến: $$u'_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + o(h)$$

Công thức đạo hàm lùi $$u'_{\bar{x}_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + o(h)$$

Công thức đạo hàm cấp hai: $$u''_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + o(h^2)$$

Ta sẽ thấy rằng khi h bé thì đạo hàm lưới "xấp xỉ" được đạo hàm thường.

B/ Trường hợp 2 chiều

- **Lưới sai phân**

Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

trong đó $\Omega = \{(x,y) \in R^2, a \le x \le b, c \le y \le d\}$, chọn 2 số nguyên $N > 1$ và $M > 1$, đặt $h = (b - a)/N$ gọi là bước lưới theo x, $k = (d - c)/M$ gọi là bước lưới theo y. Đặt $x_i = a + ih, y_j = c + jk, i = 0...N, j = 0...M$. Mỗi điểm (x_i, y_j) gọi là một nút lưới ký hiệu là nút (i, j); tập tất cả các nút trong ký hiệu là Ω_{hk}; nút ở trên biên Γ gọi là nút biên; tập tất cả các nút biên ký hiệu là Γ_{hk}, tập $\overline{\Omega}_{hk} = \Omega_{hk} \cup \Gamma_{hk}$ gọi là một lưới sai phân trên $\overline{\Omega}$.

- **Hàm lưới**:

Mỗi hàm số xác định tại các nút của lưới gọi là một hàm lưới, giá trị của hàm lưới *u(x,y)* tại nút lưới (i,j) viết tắt là $u_{i,j}$. Mỗi hàm $u_{i,j}$ xác định tại mọi $(x,y)\in\overline{\Omega}$ tạo ra hàm lưới u xác định bởi $u_{i,j}$.

- **Bài toán sai phân:**

Sử dụng công thức Taylor trong trường hợp 2 biến số, chúng ta thu được các công thức tính gần đúng các giá trị đạo hàm tại các nút lưới (i,j) như sau

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(i,j)}=\frac{1}{h}(u_{i+1,j}-u_{i,j})+o(h)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(i,j)}=\frac{1}{k}(u_{i,j+1}-u_{i,j})+o(h)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(i,j)}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+o(h^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(i,j)}=\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}+o(k^2)$$

Đặt

$$\Delta_{hk}u=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2} \tag{1.7}$$

Khi đó chứng tỏ:

$$\Delta_{kh}u = \Delta u+o(h^2+k^2)$$

Số hạng $o(h^2+k^2)$ là một vô cùng bé bậc hai. Ta nói toán tử Δ_{kh} xấp xỉ toán tử Δ, điều đó cho phép thay phương trình vi phân bằng phương trình sai phân:

$$\Delta_{hk}u=f_{ij},\quad f_{ij}=f(x_i,y_j),\quad (x_i,y_j)\in\Omega_{hk}$$

tức là: